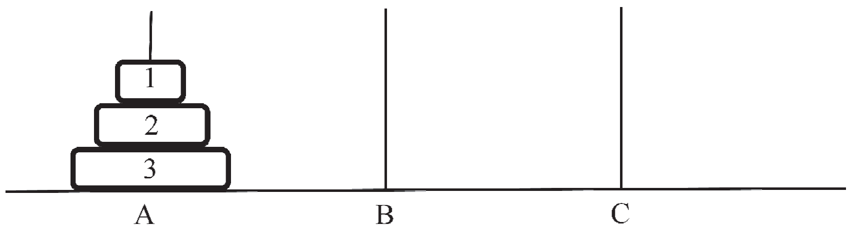
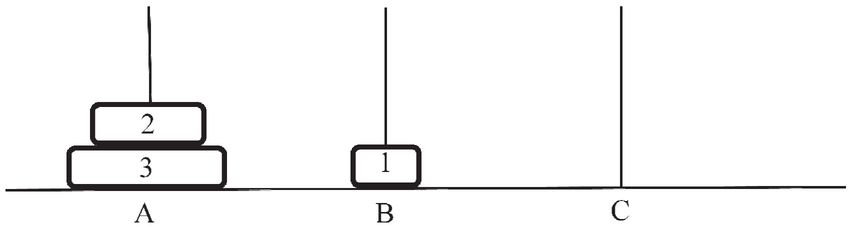
Zadanie 9.

Wiązka zadań *Wieże z Hanoi*

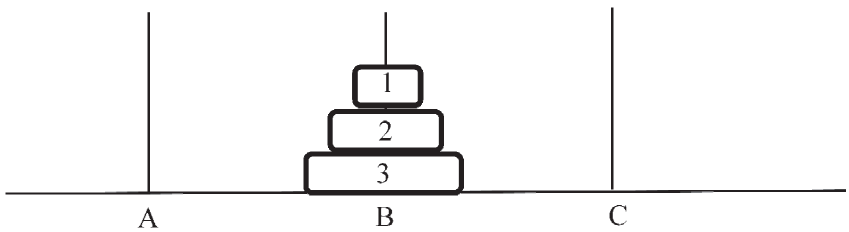
W problemie wież z Hanoi mamy trzy pręty oznaczone A, B i C oraz n okrągłych krążków o średnicach odpowiednio 1, 2, …, n. Na początku wszystkie krążki nałożone są na pręt A, w kolejności od największego do najmniejszego (największy na dole, najmniejszy na górze). Układ ten (dla n=3) został przedstawiony na poniższym rysunku.



Zgodnie z regułami problemu krążki można przekładać między prętami. W jednym ruchu możliwe jest przełożenie krążka znajdującego się na szczycie jednego z prętów na szczyt innego pręta, pod warunkiem że nie kładziemy przekładanego krążka na krążek mniejszy od niego. Na przykład na poniższym rysunku krążek 2 możemy przełożyć z pręta A na pręt C, natomiast niemożliwe jest przełożenie go na pręt B.



Zadanie polega na przełożeniu wszystkich krążków z pręta A na pręt B, przy czym można korzystać z pomocniczego pręta C. Na poniższym rysunku przedstawiono efekt końcowy.



Problem wież z Hanoi można rozwiązać za pomocą algorytmu rekurencyjnego. W algorytmie pręty: startowy, docelowy i pomocniczy, podane są jako parametry wejściowe, odpowiednio x, y i z. Algorytm polega na tym, że najpierw przenosimy n – 1 krążków na pręt pomocniczy z, potem największy krążek zostaje przeniesiony na pręt docelowy y, a na koniec n – 1 krążków zostaje przeniesionych z pręta pomocniczego z na pręt docelowy y, przy czym pręt startowy x traktowany jest jako pomocniczy.

Algorytm

Specyfikacja

Dane:

n — liczba całkowita dodatnia,

x — nazwa pręta startowego,

y — nazwa pręta docelowego,

z — nazwa pręta pomocniczego.

Wynik:

ciąg ruchów opisujący rozwiązanie problemu wież z Hanoi z n krążkami, w którym na początku wszystkie krążki znajdują się na pręcie x, a na końcu mają znaleźć się na pręcie y, zaś pomocniczym prętem jest z.

Uwaga: Pojedynczy ruch zapisujemy za pomocą znaku ⇒. Na przykład C ⇒ B oznacza przeniesienie krążka z pręta C na pręt B.

```
funkcja wieże(n, x, y, z)
    jeżeli n=1
        wypisz x ⇒ y
    w przeciwnym razie
        wieże(n – 1, x, z, y)
        wypisz x ⇒ y
        wieże(n – 1, z, y, x)
```

Przykład

Wywołanie *wieże*(2, A, B, C) spowoduje dwa wywołania rekurencyjne: *wieże*(1, A, C, B) oraz wieże(1, C, B, A). Ciąg ruchów utworzony przez *wieże*(2, A, B, C) ma postać:

A ⇒ C, A ⇒ B, C ⇒ B,

gdzie podkreślone ruchy są utworzone przez rekurencyjne wywołania *wieże*(1, A, C, B) oraz *wieże*(1, C, B, A).

9.1.

Podaj wszystkie wywołania rekurencyjne funkcji *wieże* (wraz z ich parametrami), do których dojdzie w wyniku wywołania *wieże*(3, A, B, C). Odpowiedź podaj w poniższej tabeli, uzupełniając parametry wszystkich wywołań rekurencyjnych.

n	*x*	*y*	*z*
3	A	B	C
2	A	C	B
1	A	B	C
1			
2			
1			
1			

9.2.

Prześledź działanie *wieże*(3, A, B, C) i uzupełnij poniżej wygenerowany ciąg ruchów:

A⇒B; A⇒C; ……………………………………………………………………………

9.3.

Niech H(n) oznacza liczbę ruchów wykonanych przez podany algorytm dla n krążków. Zauważ, że rozwiązanie problemu dla n>1 krążków wymaga jednego ruchu oraz dwukrotnego rozwiązania problemu dla n – 1 krążków. W oparciu o tę obserwację uzupełnij poniższą tabelę.

n	H(*n*)
1	1
2	3
3	
4	
5	
7	
10	

Podaj ogólny wzór określający liczbę ruchów dla n krążków:

H(n)= ....

9.4.

Poniżej prezentujemy nierekurencyjne rozwiązanie problemu wież z Hanoi.

Specyfikacja

Dane:

n — liczba całkowita dodatnia,

Wynik:

ciąg ruchów opisujący rozwiązanie problemu wież z Hanoi z n krążkami, w którym na początku wszystkie krążki znajdują się na pręcie A, a na końcu powinny się znaleźć na pręcie B.

Algorytm:

(1) **dopóki** (pręt A jest niepusty lub pręt C jest niepusty) **wykonuj**
(2)   **jeżeli** n jest parzyste:
(3)   **przenieś** krążek nr 1 o jedną pozycję w lewo
(4)   **w przeciwnym razie**
(5)   **przenieś** krążek nr 1 o jedną pozycję w prawo
(6)   **przenieś** krążek między prętami, na których nie ma krążka nr 1

W powyższym algorytmie przeniesienie krążka nr 1 o jedną pozycję w prawo oznacza wykonanie jednego z ruchów A⇒B, B⇒C lub C⇒A, tak aby krążek nr 1 został przeniesiony na inny pręt. Analogicznie przeniesienie krążka w lewo oznacza wybranie jednego z ruchów A⇒C, B⇒A lub C⇒B, tak aby krążek nr 1 został przeniesiony na inny pręt.

Ruch w kroku (6) powyższego algorytmu jest określony jednoznacznie, gdyż dopuszczalne jest tylko położenie mniejszego krążka na większym, a nie odwrotnie.

Przykład

Dla n=3 powyższy algorytm wykona następujący ciąg ruchów:

$$\underline{A \Rightarrow B};\ A \Rightarrow C;\ \underline{B \Rightarrow C};\ A \Rightarrow B;\ \underline{C \Rightarrow A};\ C \Rightarrow B;\ \underline{A \Rightarrow B},$$

gdzie ruchy podkreślone przenoszą krążek nr 1 o jedną pozycję w prawo.

Wypisz ciąg ruchów, który poda powyższy algorytm dla n=4.

Publikacja opracowana przez zespół koordynowany przez **Renatę Świrko** działający w ramach projektu *Budowa banków zadań* realizowanego przez Centralną Komisję Egzaminacyjną pod kierunkiem Janiny Grzegorek.

Autorzy
dr Lech Duraj
dr Ewa Kołczyk
Agata Kordas-Łata
dr Beata Laszkiewicz
Michał Malarski
dr Rafał Nowak
Rita Pluta
Dorota Roman-Jurdzińska

Komentatorzy
prof. dr hab. Krzysztof Diks
prof. dr hab. Krzysztof Loryś
Romualda Laskowska
Joanna Śmigielska

Opracowanie redakcyjne
Jakub Pochrybniak

Redaktor naczelny
Julia Konkołowicz-Pniewska

Zbiory zadań opracowano w ramach projektu *Budowa banków zadań*,
Działanie 3.2 Rozwój systemu egzaminów zewnętrznych,
Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty,
Program Operacyjny Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY