1 Legenda

Jak głosi stara hinduska legenda, przy stworzeniu świata, w jego środku, pod dachem świątyni, umieszczone zostały trzy diamentowe pałeczki. Na jedną z nich nałożonych było 64 złotych krążków o zmniejszających się średnicach tworząc złoty stożek. Dzień i noc, zmieniając się bezustannie, mnisi przekładali krążki na trzecią pałeczkę. Musieli jednak zachować pewne zasady. Mogli posiłkować się drugą pałeczką, jednakże nie wolno było im przenosić więcej niż jeden krążek i umieszczać większego na mniejszym. Gdy wykonają swoje zadanie - nastąpi koniec świata!

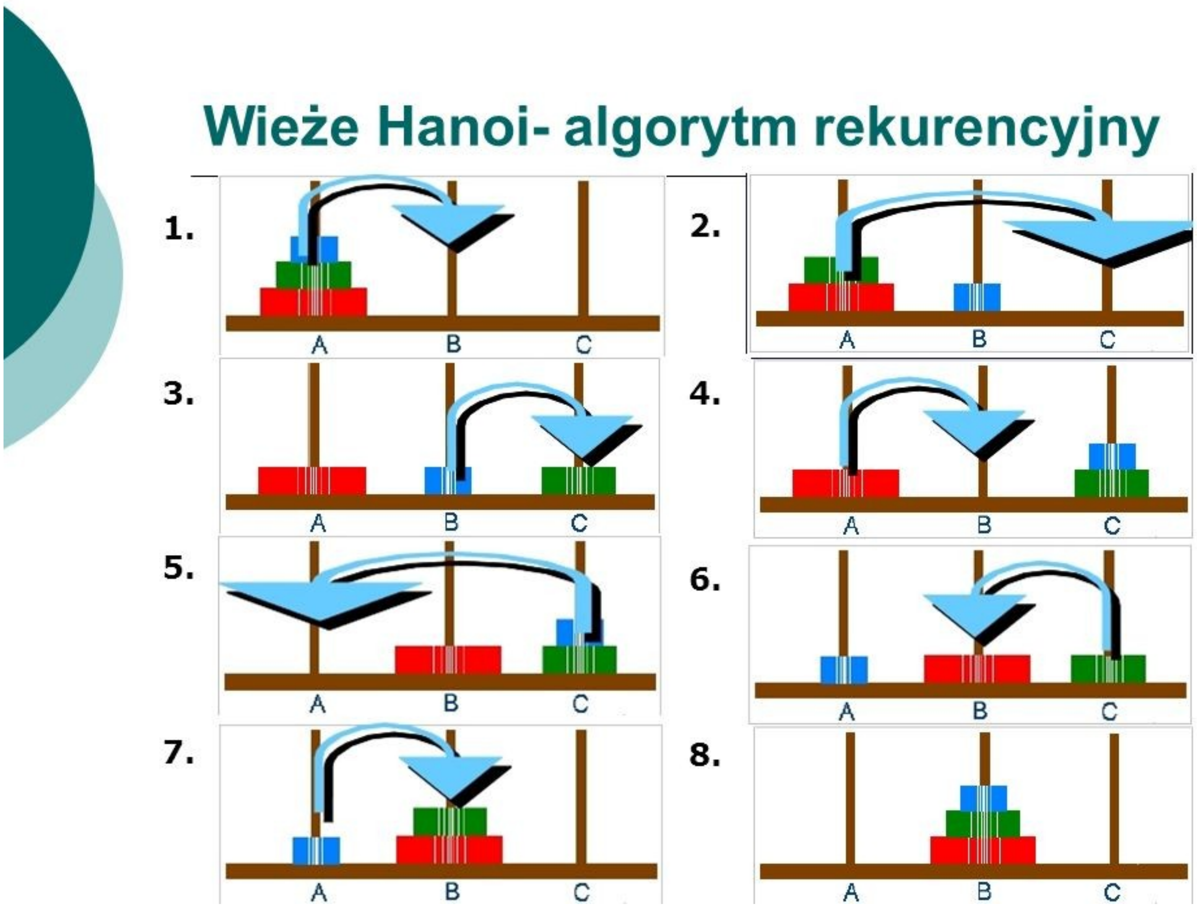
2 Wprowadzenie

Zagadka wież Hanoi jest znanym przykładem problemu algorytmicznego rozwiązywanego rekurencyjnie. Zasady gry są następujące:

- mamy trzy paliki, które oznaczamy: A, B, C,
- mamy określoną liczbę krążków różnej wielkości,
- krążki nałożone są na palik A i ułożone kolejno od największego, znajdującego się na dole, do najmniejszego na górze,
- zadanie polega na przełożeniu wszystkich krążków z palika A na palik B,
- przy przekładaniu krążków można korzystać z palika C,
- wolno przełożyć jeden krążek z dowolnego palika na inny dowolny palik,
- nie wolno położyć większego krążka na mniejszy.

Po wykonaniu zadania wszystkie krążki powinny znajdować się na paliku B, ułożone kolejno od największego, znajdującego się na dole, do najmniejszego.

3 Wizualizacja – rozwiązanie problemu dla 3 krążków



https://slideplayer.pl/slide/403532/1/images/9/Wie%C5%BCe+Hanoi-+algorytm+rekurencyjny.jpg

Grafika obrazująca rozwiązanie problemu wież Hanoi dla 3 krążków.

4 Działanie algorytmu

Na powyższej grafice przedstawiono rozwiązanie dla 3 krążków. Analizując to rozwiązanie, łatwo zauważyć kolejne etapy algorytmu:

1) Przeniesienie dwóch krążków z palika A na palik pomocniczy C z wykorzystaniem palika B.
2) Przeniesienie największego krążka z palika A na palik docelowy B.
3) Przeniesienie dwóch krążków z palika C na palik B z wykorzystaniem palika A.

Po wykonaniu ćwiczenia widać już, że podane etapy działania dla trzech krążków można wykorzystać do rozwiązania łamigłówki dla n krążków. Ogólna postać algorytmu dla n krążków jest więc następująca:

1) Przeniesienie n-1 krążków z palika A na palik pomocniczy C z wykorzystaniem palika B.

2) Przeniesienie największego krążka z palika A na palik docelowy B.
3) Przeniesienie n-1 krążków z palika C na palik B z wykorzystaniem palika A.

5 Specyfikacja

Dane:

- - trzy paliki oznaczone: A, B, C;
- - liczba naturalna: n > 0 (liczba krążków);
- - n krążków różnej wielkości, które są nałożone na palik A i ułożone kolejno od największego, znajdującego się na dole, do najmniejszego na górze.

Wynik:

- - n krążków różnej wielkości, które są nałożone na palik B i ułożone kolejno od największego, znajdującego się na dole, do najmniejszego na górze;
- przeniesienie krążków z palika A na palik B wykonane z uwzględnieniem zasad gry w wieże Hanoi.

6 Przykładowy kod w języku Python3 (funkcja rekurencyjna)

```
# rekurencyjna funkcja rozwiązująca problem wieżyHanoi
def wieza_Hanoi(s,d,p,n):
    if n>0: # jeżeli nadal są jakieś krążki do przełożenia (n>=1) to kontynuuj
            wieza_Hanoi(s,p,d,n-1) # wywołanie funkcji, które ma na celu przełożenie wszystkich krążków, które znajdują się nad n-tym krążkiem na pomocniczy palik
        print(s,"→",d) # przełożenie n-tego krążka na docelowy palik
            wieza_Hanoi(p,d,s,n-1) # wywołanie funkcji, które ma na celu przełożenie wszystkich krążków, które znajdowały się nad n-tym palikiem na docelowy palik

wieza_Hanoi("A","B","C",3) # wywołanie funkcji dla 3 krążków
```

7 Złożoność

Przejdźmy do analizy złożoności przedstawionego algorytmu. Operacją dominującą jest w nim przeniesienie krążka z jednego palika na drugi. Wyznaczmy, ile razy trzeba przenieść krążek, aby wykonać zadanie dla n krążków. Dla jednego krążka będzie to 1 ruch, dla 2 krążków będą to już 3 ruchy, a dla 3 krążków 7 ruchów. Łatwo zauważyć, że dla n krążków liczba ruchów będzie równa podwojonej liczbie ruchów wymaganych do przełożenie n-1 krążków plus 1. Wynik ten wynika z faktu, że mając n krążków, najpierw przekładamy n-1 krążków na wolny palik. W następnym kroku wykonujemy przeniesienie n-tego krążka na docelowy, wolny palik. Ostatnim etapem jest przełożenie

n-1 krążków na przeniesiony wcześniej największy (n-ty) krążek. Liczbę przeniesień krążków można więc wyrazić w postaci definicji rekurencyjnej:
a(1) = 1
a(n) = 2*a(n-1) + 1

Liczbę przeniesień można również wyrazić wzorem 2^n -1. Algorytm charakteryzuje się zatem złożonością wykładniczą rzędu O(n^2).

8 Działanie algorytmu – iteracja

Istnieją również prostsze, iteracyjne sposoby rozwiązywania wież Hanoi. Nie mają one mocy edukacyjnej w kontekście algorytmów, ale zdecydowanie łatwiej jest je zapamiętać, jeśli chcielibyśmy rozwiązywać taką zagadkę samodzielnie.

Algorytm iteracyjny składa się z następujących kroków:

1. przenieś najmniejszy krążek na kolejny (*) słupek,
2. wykonaj jedyny możliwy do wykonania ruch, nie zmieniając położenia krążka najmniejszego,
3. powtarzaj punkty 1 i 2, aż do odpowiedniego ułożenia wszystkich krążków.

(*) Kolejny słupek wyznaczamy w zależności od liczby krążków. Jeśli liczba krążków jest parzysta, kolejnym słupkiem jest ten po prawej stronie (gdy dojdziemy do słupka C w następnym ruchu używamy słupka A). Natomiast jeśli liczba krążków jest nieparzysta, kolejnym słupkiem jest ten po lewej stronie (gdy dojdziemy do słupka A w następnym ruchu używamy słupka C).