Zadanie 10.

Wiązka zadań *Dzielenie wielomianu*

Rozważamy wielomiany $P(x)$ stopnia $n-1$, gdzie n jest potęgą dwójki:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}, \qquad n = 2^m.$$

Do obliczania wartości $P(x)$ można zastosować technikę „dziel i zwyciężaj” w następujący sposób: dzielimy postać ogólną wielomianu $P(x)$ na dwie części:

$$P(x) = \underbrace{a_0 + a_1x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1}}_{\text{cz. I}} + \underbrace{a_kx^k + a_{k+1}x^{k+1} + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}}_{\text{cz. II}},$$

gdzie $k = n/2$. Jeśli w drugiej części wydzielimy czynnik x^k, to otrzymamy równość

(*) $$P(x) = A(x) + B(x) \cdot x^k,$$

gdzie $A(x)$ i $B(x)$ są wielomianami stopnia $k-1$:

$$A(x) = a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$
$$B(x) = a_{n-1}x^{k-1} + \cdots + a_{k+2}x^2 + a_{k+1}x + a_k,$$

W ten sposób problem obliczenia wartości $P(x)$ dzielimy na dwa podproblemy — obliczenia $A(x)$ i obliczenia $B(x)$, przy czym każdy z nich ma rozmiar o połowę mniejszy. Na przykład aby obliczyć wartość wielomianu ($n = 8$)

$$P(x) = -8 + 7x + 6x^2 - x^3 + 4x^4 + 5x^5 - 2x^6 + 3x^7,$$

obliczamy $k = n/2 = 4$, $A(x) = -8 + 7x + 6x^2 - x^3$ oraz $B(x) = 4 + 5x - 2x^2 + 3x^3$. Następnie korzystamy ze wzoru $P(x) = A(x) + B(x) \cdot x^4$.

Ponieważ do pełnej realizacji algorytmu we wzorze (*) potrzebne jest obliczenie wartości x^k, więc najpierw obliczamy wszystkie potęgi $x, x^2, x^4, \dots, x^{2^{m-1}}$ i zapamiętujemy je w tablicy Z[0 .. m-1], np. za pomocą poniższej procedury.

Obliczanie tablicy Z[0..m-1]:

Dane:

n — liczba całkowita postaci 2^m, gdzie m jest liczbą całkowitą nieujemną,

x — liczba rzeczywista.

Wynik:

tablica Z[0 .. m-1], dla której $Z[j] = x^{2^j}$

$Z[0] \leftarrow x$
$m \leftarrow 1$
$w \leftarrow 2$
dopóki $w < n$ **wykonuj**
    $Z[m] \leftarrow Z[m-1] \cdot Z[m-1]$
    $m \leftarrow m+1$
    $w \leftarrow 2 \cdot w$

Mając tablicę Z, obliczamy wartość $P(x)$ za pomocą funkcji rekurencyjnej *F*.

Dane:

tablica liczb rzeczywistych $T[0\,..\,n-1]$ *ze współczynnikami* $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, *gdzie* $n = 2^m$, *a m jest liczbą całkowitą nieujemną;*

tablica Z[0 .. m-1], dla której $Z[j] = x^{2^j}$.

Wynik:

wartość $a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

funkcja F($T[0\,..\;n-1]$):
  jeżeli *n*=1
    zwróć T[0] **i zakończ**
  $k \leftarrow n/2$
  $A[0\,..\,k-1] \leftarrow T[0\,..\,k-1]$
  $B[0\,..\,k-1] \leftarrow T[k\,..\,n-1]$
  zwróć F(A) + F(B) $\cdot\, Z[m-1]$ **i zakończ**

Prześledźmy na przykład obliczenie wartości wielomianu

$$P(x) = -8 + 7x + 6x^2 - x^3 + 4x^4 + 5x^5 - 2x^6 + 3x^7 \qquad (n = 2^m, \qquad m = 3)$$

dla *x*=3.

W pierwszym kroku algorytm obliczy tablicę $Z[0\,..\,2]$:

$$Z[0] = 3, \qquad Z[1] = 3^2, \qquad Z[2] = 3^4 = 81.$$

Następnie algorytm obliczy *F*([-8,7,6,-1,4,5,-2,3]), tzn.

F([-8,7,6,-1,4,5,-2,3]) = *F*([-8,7,6,-1]) + *F*([4,5,-2,3])*Z[2]

Obliczanie *F*([4,5,-2,3]) i *F*([-8,7,6,-1]) odbywa się w analogiczny sposób, tzn.

F([-8,7,6,-1]) = *F*([-8,7])+ *F*([6,-1])*Z[1]
= F([-8])+F([7])*Z[0]+(F([6])+F([-1])*Z[0])*Z[1]
= (-8)+7*Z[0] + (6+(-1)*Z[0])*Z[1]
= (-8)+7*3+(6+(-1)*3)*9 = 40,

F([4,5,-2,3]) = *F*([4,5])+*F*([-2,3])*Z[1]
= *F*([4])+*F*([5])*Z[0]+(*F*([-2])+*F*([3])*Z[0])*Z[1]
= 4+5*Z[0]+((-2)+3*Z[0])*Z[1]
= 4+5*3+((-2)+3*3)*9=82.

Zatem

F([-8,7,6,-1,4,5,-2,3]) = *F*([-8,7,6,-1])+*F*([4,5,-2,3])*Z[2] = 40+82*81 = 6682.

Można zauważyć, że podczas obliczania *F*([-8,7,6,-1,4,5,-2,3]) łącznie zostanie wykonanych 7 mnożeń:

- 3 mnożenia podczas obliczania *F*([-8,7,6,-1])=40,
- 3 mnożenia podczas obliczania *F*([4,5,-2,3])=82,
- 1 mnożenie przy obliczaniu *F*([-8,7,6,-1])+ *F*([4,5,-2,3])*Z[2] = 40+82*Z[2].

Liczba wszystkich wywołań rekurencyjnych jest równa 15. Oto wszystkie wywołania funkcji *F*:

- *F*([-8,7,6,-1,4,5,-2,3])
    - *F*([-8,7,6,-1])
        - *F*([-8,7])
            - *F*([-8])
            - *F*([7])
        - *F*([6,-1])
            - *F*([6])
            - *F*([-1])
    - *F*([4,5,-2,3])
        - *F*([4,5])
            - *F*([4])
            - *F*([5])
        - *F*([-2,3])
            - *F*([-2])
            - *F*([3])

10.1.

Podaj, jakie wartości zostaną obliczone w tablicy *Z*[0 .. *m*-1] przy obliczaniu $P(2)$, gdzie

$$P(x) = 9 + x - 6x^3 + 2x^7 - 3x^{14} + 5x^{15}.$$

10.2.

Oblicz łączną liczbę operacji mnożenia, jaka zostanie wykonana przez funkcję *F*(T) dla *n*-elementowej tablicy T.

Uzupełnij poniższą tabelkę:

n	Liczba operacji mnożenia
1	0
2	
4	
8	
16	
1024	

Uzupełnij poniższy wzór rekurencyjny dla *f*(*n*) — liczby operacji mnożenia wykonywanych przez funkcję *F* dla tablicy *n*-elementowej:

$$f(n) = \text{.........} \cdot f(n/2) + \text{..................} \quad \text{dla } n > 1$$

10.3.

Wypisz wszystkie wywołania funkcji *F* podczas obliczania

$$P(x) = 9 + x - 6x^3 + 10x^5 + 2x^7 + 4x^9 - x^{10} - 3x^{14} + 5x^{15}.$$

Podaj wzór ogólny na *g*(*n*) — liczbę wszystkich wywołań funkcji *F* dla wielomianu $P(x)$ stopnia $n-1$, gdzie n jest potęgą dwójki. Uzupełnij poniższy wzór:

$g(n) =$............................

10.4.

Do obliczania wartości wielomianu $P(x)$

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \qquad (n = 3^m),$$

a więc gdy n jest potęgą trójki, można zastosować podział na trzy części

$$P(x) = \underbrace{a_0 + \dots + a_{k-1}x^{k-1}}_{\text{cz. I}} + \underbrace{a_kx^k + \dots + a_{2k-1}x^{2k-1}}_{\text{cz. II}} + \underbrace{a_{2k}x^{2k} + \dots + a_{n-1}x^{n-1}}_{\text{cz. III}},$$

gdzie $k = n/3$. Wówczas uzyskujemy

$$P(x) = A(x) + B(x) \cdot x^k + C(x) \cdot x^{2k} = A(x) + (B(x) + C(x) \cdot x^k) \cdot x^k,$$

gdzie $A(x), B(x), C(x)$ są wielomianami, w których liczba współczynników jest trzykrotnie mniejsza niż w wyjściowym wielomianie $P(x)$.

Wzorując się na funkcji *F*, możemy skonstruować rekurencyjną funkcję *G*(T[0 .. n-1]), obliczającą wartość $P(x)$ przez podział tablicy *T* na trzy równe części, o ile $n > 1$. Po obliczeniu trzech wyników dla każdej z części, powiedzmy $A(x), B(x), C(x)$, funkcja oblicza swój wynik, wykonując dodatkowo dwa mnożenia:

- jedno mnożenie przy obliczaniu $C(x) \cdot x^k$.
- jedno mnożenie przy obliczaniu $(B(x) + C(x) \cdot x^k) \cdot x^k$.

Podobnie jak poprzednio pomijamy problem obliczania potęg x^k dla $k = 3^j$ ($j \geq 0$), tzn. przyjmujemy, że potęgi te są przechowywane w pewnej tablicy *Z*[0 .. *m*-1], a więc ich obliczanie nie jest wliczane do kosztu obliczeniowego funkcji *G*.

W ten sposób na przykład dla *n*=3 funkcja *G* wykona dokładnie 2 mnożenia, a dla *n*=9 funkcja wykona łącznie 8 mnożeń:

- po 2 mnożenia dla każdej z trzech części $A(x), B(x), C(x)$,
- jedno mnożenie przy obliczaniu $C(x) \cdot x^k$.
- jedno mnożenie przy obliczaniu $(B(x) + C(x) \cdot x^k) \cdot x^k$.

Uzupełnij poniższą tabelkę, podając liczbę mnożeń, jaka zostanie wykonana przez funkcję *G* dla *n*-elementowej tablicy współczynników T.

n	**Liczba operacji mnożenia**
3	2
9	8
27	
81	
243	

Publikacja opracowana przez zespół koordynowany przez **Renatę Świrko** działający w ramach projektu *Budowa banków zadań* realizowanego przez Centralną Komisję Egzaminacyjną pod kierunkiem Janiny Grzegorek.

Autorzy
dr Lech Duraj
dr Ewa Kołczyk
Agata Kordas-Łata
dr Beata Laszkiewicz
Michał Malarski
dr Rafał Nowak
Rita Pluta
Dorota Roman-Jurdzińska

Komentatorzy
prof. dr hab. Krzysztof Diks
prof. dr hab. Krzysztof Loryś
Romualda Laskowska
Joanna Śmigielska

Opracowanie redakcyjne
Jakub Pochrybniak

Redaktor naczelny
Julia Konkołowicz-Pniewska

Zbiory zadań opracowano w ramach projektu *Budowa banków zadań*,
Działanie 3.2 Rozwój systemu egzaminów zewnętrznych,
Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty,
Program Operacyjny Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY