Zadanie 21.

Wiązka zadań *Szybkie podnoszenie do potęgi*

W algorytmach szybkiego potęgowania można wykorzystać binarną reprezentację wykładnika dla obliczenia wartości x^k, gdzie k jest liczbą naturalną, $k \neq 0$, zaś x jest liczbą rzeczywistą. Przyjmijmy, że binarnym rozwinięciem wykładnika k jest ciąg $(k_n k_{n-1} k_{n-2} \dots k_2 k_1 k_0)_2$.

Jedna z metod wyznaczania x^k polega na obliczaniu potęg liczby x dla wykładników o binarnych reprezentacjach:

$$k_n,$$

$$k_n k_{n-1},$$

$$k_n k_{n-1} k_{n-2},$$

$$\dots,$$

$$k_n k_{n-1} k_{n-2} \dots k_1,$$

$$k_n k_{n-1} k_{n-2} \dots k_1 k_0,$$

Inaczej mówiąc, uwzględniamy coraz dłuższe fragmenty ciągu $(k_n k_{n-1} k_{n-2} \ldots k_2 k_1 k_0)_2$. W pierwszym kroku przyjmujemy, że wynik jest równy x, gdyż $k_n = 1$. Znając wartość x do potęgi o binarnym zapisie $(k_n k_{n-1} k_{n-2} \ldots k_i)_2$, możemy łatwo wyliczyć x do potęgi o binarnym zapisie $(k_n k_{n-1} k_{n-2} \ldots k_i k_{i-1})_2$: podnosimy dotychczasowy wynik do kwadratu (do czego wystarczy jedno mnożenie). Jeśli $k_{i-1} = 1$, dodatkowo mnożymy uzyskany wynik przez x.

Przykład

Niech $k = 13 = (1101)_2$. Kolejne wyznaczane w naszym algorytmie potęgi to:

$$x^1,\ x^3 = x^2 x,\ x^6 = (x^3)^2,\ x^{13} = (x^6)^2 x,$$

zaś liczba wykonanych mnożeń jest równa 5 (zauważ, że aby obliczyć x^3, musisz najpierw obliczyć x^2, a aby obliczyć x^2, musisz wykonać jedno mnożenie: $x^2 = x \cdot x$).

21.1.

Korzystając z przedstawienia wykładnika w postaci binarnej, podaj kolejne potęgi liczby x wyznaczane powyższą metodą przy obliczaniu x^{38}.

21.2.

Uzupełnij tabelkę. Oblicz, ile mnożeń wykonywanych jest dla kolejnych wykładników.

k	**reprezentacja binarna *k***	**liczba mnożeń**
4	100	2
5	101	3
6		
7		
8		
15		
16		
22		
32		

21.3.

W wybranej przez siebie notacji (lista kroków, pseudokod, język programowania) napisz algorytm, który dla zadanej binarnej reprezentacji liczby naturalnej k, $k \neq 0$, oraz rzeczywistej liczby x oblicza wartość x^k zgodnie z metodą opisaną na początku zadania.

Specyfikacja

Dane:

x — liczba rzeczywista,

n — liczba całkowita nieujemna,

$k_n k_{n-1} k_{n-2} \ldots k_1 k_0$ — ciąg tworzący binarną reprezentację wykładnika k,

Wynik:

liczba rzeczywista $p = x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{k\ razy}$

Publikacja opracowana przez zespół koordynowany przez **Renatę Świrko** działający w ramach projektu *Budowa banków zadań* realizowanego przez Centralną Komisję Egzaminacyjną pod kierunkiem Janiny Grzegorek.

Autorzy
dr Lech Duraj
dr Ewa Kołczyk
Agata Kordas-Łata
dr Beata Laszkiewicz
Michał Malarski
dr Rafał Nowak
Rita Pluta
Dorota Roman-Jurdzińska

Komentatorzy
prof. dr hab. Krzysztof Diks
prof. dr hab. Krzysztof Loryś
Romualda Laskowska
Joanna Śmigielska

Opracowanie redakcyjne
Jakub Pochrybniak

Redaktor naczelny
Julia Konkołowicz-Pniewska

Zbiory zadań opracowano w ramach projektu *Budowa banków zadań*,
Działanie 3.2 Rozwój systemu egzaminów zewnętrznych,
Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty,
Program Operacyjny Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI — CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA — UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY